Pensamiento Educativo. Vol. 27 (diciembre 2000), pp. 169-194

LAS REPRESENTACIONES COMO FUNDAMENTO DE UNA DIDACTICA DE LAS MATEMATICAS

MIGUEL ANGEL CAMPOS HERNÁNDEZ*
PATRICIA BALDERAS CAÑAS**

Resumen

Se muestra la importancia de las representaciones matemáticas como fundamento didáctico, a partir de una experiencia concreta, su estudio interpretativo y teoría cognitivo-epistemológica de la representación, desde un enfoque constructivista. La estrategia docente centrada en un enfoque estratégico-representacional, en la asignatura de introducción al cálculo, propicia un cambio *paradigmático* en el aprendizaje: de una visión de problemas matemáticos basada en medición y manejo aritmético *de datos* para obtener *una* solución, a una que identifica *variables* y aplica el concepto de *función* con manejo algebraico. Sin embargo, la dificultad de *procedimiento* en el uso de la derivada requiere mayor tiempo y atención, ya que la mayoría de los estudiantes (incluidos los de un grupo comparativo que trabajó en forma estándar) no la usó o la usó incorrectamente.

Abstract

Mathematical representations importance is shown as didactic foundation, starting from a concrete experience and its interpretative study, considered in a epistemological-cognitive theory of representation, from a contructiviste perspective. Educational strategy on introduction to calculation subject centered in a strategic-representational perspective propitiates a paradigmathic change in learning: from a mathematical problems vision based on mensuration and arithmetic handling of data to obtain a solution, to one that identifies variables and it applies the function concept with algebraic handling. However, procedure difficulty in use of one derived requires bigger time and attention, since most of students (included those of a comparative group that in standard form), it didn't use it used it incorrectly.

* Instituto de Investigaciones en Matemáticas Aplicadas y en Sistemas, UNAM.
** Facultad de Ingeniería, UNAM.

Presentación

El propósito de este trabajo es discutir el papel fundamental de la representación en la didáctica de las matemáticas. La representación comprende aspectos paradigmáticos, por lo que incluye formas específicas de entender y operar matemáticamente, todo ello en los planos conceptual, lógico y de procedimiento. En las décadas recientes la reflexión en educación matemática ha incorporado elementos epistemológicos desde posturas constructivistas generadas en teorías cognoscitivas (Neisser, 1981; Sternberg, 1987); el enfoque sociohistórico (Kuhn, 1972); las aproximaciores epistemológicas de la ciencia (Popper, 1985; Lakatos, 1978), y el enfoque sociocultural (Vygostsky, 1934), muchos de ellos integrados en los trabajos de Schoenfeld (1992), Hiebert y Carpenter (1992), Ernest (1998) y otros[1]. Desde esta perspectiva se plantea que pensar y hacer matemáticas es un proceso de *construcción de sentido* (Schoenfeld, *id.*), en el que están involucrados sistemas racionales y de creencias. Esta construcción se basa en *representaciones*[2], con las que se opera y reconstruyen dichos sistemas racionales. Esta operación cognitiva puede analizarse desde el plano lingüístico (Frid, 1992; Pressini y Knuth, 1998; Presmeg, 1998; Campos y Estrada, 1999), nivel de análisis en que ubica este trabajo. Presentaremos resultados de nuestras investigaciones en esta área, y una propuesta didáctica enfocada al nivel preuniversitario (grados 10º a 12º).

Nivel cognitivo de la representación

El acceso a la realidad circundante o pensada sucede antes de introducirse al pensamiento matemático *como disciplina* en la es-

---

1 Aunque Heytig, Brouwer y otros se plantearon el carácter constructivo de las matemáticas desde hace muchas décadas, su enfoque no permeó ni el pensamiento matemático ni su enseñanza.

2 Desde Kant, el constructivismo actual plantea la problemática representacional en el acto cognitivo y epistemológico.

cuela. Se construye conocimiento mediante procesos básicos de carácter cognitivo[3], integrando una variedad de representaciones, no todas coherentes. Es lo que se conoce como *conocimiento informal*. Siguiendo la línea constructivista kantiano-piagetiana hasta sus versiones actuales, la representación es un proceso articulado de contenidos y maneras de percibir, imaginar, categorizar, describir y explicar la realidad, incluidos los objetos simbólicos (Campos y Gaspar, 2000). Este proceso se da en tres dimensiones: la mediación de la *acción* entre sujeto y objeto, la *interacción social* y el *relacionamiento categorial*, lo cual permite construir imágenes (construcciones hipóteticas o con algún nivel de similitud respecto de objetos materiales o simbólicos), conceptualizaciones (constructos significativos que describen, explican o caracterizan las relaciones entre objetos/procesos) y estructuras lógicas (que determinan qué y cómo articular conceptos sin perder significado). La *acción del sujeto* hace posible la construcción del objeto (material o simbólico), creando sentidos, formando representaciones. Al unir significados previamente construidos con los nuevos, se produce un nuevo conjunto representacional con significados y modalidades específicas, el cual estará disponible en nuevas situaciones.

Desde las condiciones sociales que permiten el desarrollo de operaciones cognitivas, y en particular el encuentro con objetos por vez primera, se constata que la construcción de representaciones no es individual. Se genera en el proceso de *interacción social* (Bloome, 1992; Garton, 1994), en el que se encuentran descripciones, definiciones e interpretaciones que otros ya han dado a objetos diversos. Según Vygotsky dicha interacción está mediada por el comportamiento verbal y la solución de problemas, con lo que integra la comunicación (*externa*) a la acción cognitiva (*interna*). En este contexto, la

[3] Este es el aporte de Piaget y el constructivismo precisamente: no solamente el conocimiento, sino la lógica y las operaciones cognitivas que le dan soporte también se construyen.

representación es una construcción, como *esquemas figurativos* (Herzlich, 1975) de objetos abstractos como *línea* o *suma*, que preceden a las fomulaciones de las matemática.[4]

La representación se basa en una operación elemental de relación (Culioli, 1994, 182), lo que da forma y valor a los objetos. El *relacionamiento categorial* establece conexiones entre categorías, imágenes y otros elementos simbólicos, de acuerdo con *alguna estructura lógica*.[5] El significado categorial y relacional de las representaciones constituye su *nivel general* (o enfoque), mientras que sus contenidos particulares constituyen *representaciones específicas* (en el caso del conocimiento informal, se trata generalmente de representaciones figurales, discursivas y cuantitativas elementales). Cuando se orienta a propósitos específicos (como resolver un ejercicio de aritmética), se conforma el *pensamiento estratégico*, que es la base cognitiva del proceso de resolución de problemas en matemáticas. Este proceso relacional está articulado a la forma en que las personas *interactúan* con los objetos de referencia (Medin y Wattenmaker, 1989), especialmente los simbólicos, proceso que es muy importante en el contexto de las matemáticas.

El conocimiento informal presenta contradicciones debido a que se basa en información no verificada y con bajos niveles de coherencia lógica, aunque satisfaga necesidades o percepciones cotidianas individuales. De esta manera, en tanto que significado, la representación es un substituto del objeto (Davis *et al.,* 1993) y establece qué

---

4 La representación es un instrumento cognitivo-epistemológico muy podersoso, ya que además de representarse la realidad, incluido *el otro*, el mismo proceso de interacción social del que no se puede separar permite la representación de *sí mismo* (Burkitt, 1991) así como la orientación y justificación del comportamiento (Blumer, 1982).

5 Desde la perspectiva constructivista todo conocimiento tiene contenido lógico (*i.e.*, ¿cómo conocemos?). La diferencia entre conocer en general y conocer científicamente en particular, como veremos en la siguiente sección, está dada por la justificación de este último (lo que es aceptado como verdadero; *i.e.*: el problema epistemológico, ¿cómo sabemos que lo que conocemos es verdadero/cierto/válido?).

objetos ver, especialmente los abstractos, y qué ver en ellos (plano ontológico), determina formas de acción intelectual o física (plano metodológico) y es un medio para la expresión (plano semiótico). Más que una simple imagen, momentánea y puntual, la representación es un proceso constructivo que pone en operación, en su construcción y en su uso, el conocimiento disponible (conocimiento previo), en condiciones sociales específicas. Es un instrumento de relación con el mundo y del propio proceso de construcción.

Nivel epistemológico de la representación

El conocimiento formal, plano en el que se encuentra pensar y hacer matemáticas *como disciplina*, es sólo una de las modalidades del conocer (ver notas 2, 3 y 5). Se produce en las mismas condiciones cognitivas que el conocimiento informal, con todas las características ya mencionadas, pero establece restricciones lógicas o reglas para hacer inferencias válidas, y produce sus propias definiciones abstractas. Con ello se introduce el rigor lógico.[6] Además se utiliza un lenguaje técnico.[7] En el caso de la modelación, la simulación y otras aplicaciones, se requiere mantener correspondencia empírica con los fenómenos sobre los que se trabaja. Estos procesos son muy importantes en la didáctica de las matemáticas.

Como toda representación, las de carácter matemático son esquemas internos (Dreyfus, 1991) que se convierten en externos al comunicarse mediante lenguaje verbal, símbolos o figuras (Hiebert

---

6 Su rigor lógico-metodológico se establece según se le identifique con la lógica (logicismo: Russell); de su carácter formal e independiente de la experiencia (formalismo: Hilbert); de la integración intelecto/experiencia (intuicionismo, terreno en el que se ubica el constructivismo matemático: Heyting, Brouwer, Bishop) con formas ideales (ver la crítica a esta postura en Ernest, 1998).

7 Las publicaciones especializadas contienen un alto nivel de conocimiento formal, pero cada especialista mantiene algunas representaciones informales, en particular en campos fuera de su especialidad, que se introducen al ámbito formal en la vida cotidiana.

y Carpenter, *id.*.) y otras formas semióticas. Son "enfoques generales o formas de pensamiento que se necesitan para construir... procedimientos /particulares/" (Hiebert *et al*., 1996). Las representaciones matemáticas describen conceptos en varias formas, como gráficas, descripciones verbales, tablas y fórmulas o ecuaciones (Janvier, 1978; itálicas en el original), en un proceso de traducción de una a otra (Janvier, 1987; Dreyfus, 1991; Eisenberg y Dreyfus, 1992).

Es ampliamente conocida la diferencia entre *ejercicios rutinarios*, que contienen *datos*, *un* procedimiento específico conocido, y *una* solución, y *problemas matemáticos*, que requieren interpretación, búsqueda y estimación (*v.g.* Schoenfeld, *id*.). Los ejercicios rutinarios proveen práctica, pero limitan importantes acciones cognitivas como hacerse preguntas, generación de estrategias propias con base en conocimiento, y controlar o regular el propio proceso de resolución. Este parte de la traducción del enunciado a una forma manejable (Brown y Walter, 1990), de acuerdo con el conocimiento previo cognitivamente disponible, combinado con algún sistema de creencias y orientado estratégicamente a la búsqueda de patrones y su evaluación (Schoenfeld, *id*., 335). Se opera con una o más formas representacionales, desde plantearse el problema y establecer vías de resolución (nivel general) hasta la búsqueda de solución (nivel específico). Como se puede notar, este proceso no es sólo lógico y racional.[8] Los objetos matemáticos tienen que ser construidos contextualmente por cada estudiante (ver notas 3 y 4), generar un significado, asignarles sentido.

Construcción de representaciones en el aula: una experiencia didáctica

Con base en una metodología cualitativa de tipo *emergente* (Strauss y Corbin, 1994), en la que no se definen representaciones

[8] Los enfoques racionalistas dan preeminencia a la conformación de las ideas sobre la experiencia, por lo que establece una diferencia entre sujeto y objeto, entre razonamiento y experiencia, y entre ellos y el contexto social.

a priori, sino las que expresan los estudiantes a partir de un problema específico, hemos estudiado las formas en que los estudiantes de 12° grado se lo representan (Campos y Estrada, 1999). Siguiendo en esta línea, ahora presentamos los resultados de un estudio que muestra la construcción de representaciones de profesor y alumnos en el proceso de resolución de problemas durante la conducción de la clase, y los exámenes correspondientes. Se estudiaron dos grupos (G1 = 15; G2 = 9) de la asignatura Introducción al Cálculo, 12° grado escolar, en la que se revisa la derivada y métodos de integración. Los estudiantes inician esta asignatura habiendo revisado elementos de álgebra, geometría analítica y euclidiana, que incluyen ejercicios y problemas con métodos algebraicos y graficación, así como funciones icónicas, en los grados 10° y 11°.

Partimos de la base de que el propósito de la enseñanza de las matemáticas es ofrecer condiciones para que los estudiantes entiendan que los problemas se deben abordan desde una concepción flexible y que su solución requiere formas representacionales equivalentes y manipulaciones simbólicas particulares (Harel y Kaput, 1991; Dreyfus, 1991). Esto significa presentar y facilitar el uso de cada concepto matemático en varios sistemas representacionales que sean estructurados (Kaput, 1998) y suficientemente poderosos (Balderas, 1998) para que, intercambiándolos o transitando entre ellos, puedan resolver problemas. Además, que la discusión en el aula, organizada lógicamente desde el punto de vista de los requerimientos lógico-categoriales de las matemáticas, se estructure con base en el planteamiento de conjeturas y se aborde con conceptos y métodos matemáticos adecuados a este nivel escolar, todo ello acompañado de ejemplos, contraejemplos, problemas y ejercicios. Con ello, se propicia el desarrollo de habilidades analítico-relacionales con base en la construcción de estructuras o esquemas categoriales abstractos.

Objetivo de aprendizaje

En este contexto, además de establecer propósitos relativos al desarrollo de habilidades de planteo, procedimiento y argumentación de soluciones obtenidas, un objetivo concreto de aprendizaje en nuestra estrategia docente, y en el que nos concentraremos en este trabajo, es *que los estudiantes desarrollen una concepción de la resolución de problemas como un proceso constructivo que se inicia en el planteo, con base en el uso estratégico de diversas representaciones matemáticas, equivalentes e intercambiables, e identificación de variables*. Este es un propósito ambicioso en la medida en que se encuentra en el plano paradigmático, en el nivel de las transformaciones lógico-categoriales y construcción de sentido a que Schoenfeld (*id*.) hace referencia. El programa de la asignatura implica también el uso de la derivada, por lo que los objetivos complementarios apuntan al desarrollo de conocimientos y habilidades en procedimientos de resolución y monitoreo (de procedimientos y soluciones obtenidas).

Esquema general o plan de trabajo

Con base en lo anterior, se organizó la clase en el G1 en los siguientes bloques estratégico-temáticos, que se ajusta conforme se avanza en el trabajo didáctico respecto a un problema particular, y que se recicla al trabajar otros problemas y temas:

(a) Revisión de conocimiento previo y articulación a conocimiento nuevo.

(b) Planteamiento de problema: traducción a una forma representacional manejable, análisis de componentes con énfasis en el concepto de variable.

(c) Generalización de operación estratégica: planteamiento, variables y conjetura.

(d) Abordaje estratégico del problema y desarrollo de procedimiento de resolución.

(e) Monitoreo o evaluación continua de procedimiento y solución.

Diagnóstico (preprueba)

Además de detectar conocimiento previo, interesa saber cómo lo utilizan los estudiantes con relación al conocimiento complejo que se estudia en esta asignatura, como es el caso de la derivada. Entre otras preguntas en la preprueba, se planteó el siguiente problema de optimización:[9]

Forma una caja abierta, con base en una hoja de metal de 18 centímetros por lado, recortando en cada esquina un mismo cuadrado. ¿Cuáles son las dimensiones de la caja para que su volumen sea el máximo?

Ambos grupos respondieron operando con las siguientes seis formas representacionales: Aritmética, Conceptual, Figural, Medición, Numérica y Simbólica (ver Anexo 1). La forma más frecuente es la Figural en ambos grupos (seguida de Conceptual y Medición en el grupo G1 y de Medición y Conceptual en el G2). La referencia representacional más frecuente por etapa, en ambos grupos, es la Figural en la *preparación* (interpretación o traducción que los estudiantes hacen del problema y que determina una estrategia específica), Aritmética en el *procedimiento* (secuencia de operaciones con datos o variables), y Conceptual en la *conclusión* (por cálculos, comparaciones o inferencias). Es decir, ambos grupos utilizaron un contenido representacional similar al inicio del programa.

Se encontró una gran diversidad de formas de resolución, pero se observan las siguientes características generales: seis estudiantes del G1 y tres del G2 decidieron hacer un *corte* en las esquinas como se solicita en el examen. Por otra parte, siete en G1 y tres en G2 decidieron *agregar* paredes a la pieza de papel para formar la caja;

[9] Se informó a los estudiantes que tenían dos horas para resolver el problema y que era parte de un estudio sin efecto en la calificación. Todos los estudiantes respondieron al examen. El promedio de tiempo para responder fue de alrededor de la mitad del tiempo disponible.

mientras que dos estudiantes del G1 y tres del G2 decidieron *dividir* la pieza sin un criterio claro.[10] Además de limitarse a trabajar aritméticamente, la mayoría manejó sólo un caso. Se esperaba que mostraran conocimiento algebraico revisado en asignaturas anteriores, trabajaran cortes en por lo menos dos casos, compararan resultados y llegaran a una conclusión, pero la mayoría no lo hizo. Es decir, el diagnóstico muestra que los estudiantes tenían una concepción de problemas matemáticos como ejercicio rutinario, basado en representaciones y trabajo prealgebraicos.

Conducción de la clase: enfoque multirrepresentacional y análisis de componentes del problema (G1)

En ambos grupos se enseñó el tema de la derivada durante doce sesiones de tres horas cada una, por un lapso de tres semanas, a lo que siguieron temas relativos a reglas de derivación y métodos de integración.

Con base en el objetivo y el plan propuestos, el diseño didáctico en el G1 incluye una amplia variedad de actividades que ofrece suficientes oportunidades de participación a los estudiantes durante el desarrollo del programa: discusión en grupo y por equipos, de planteamiento del problemas, identificación de componentes (variables, datos, restricciones), así como soluciones y procedimientos posibles.

[10] En un estudio observacional que se reporta en otra parte, se revisó si la estrategia de *agregar paredes* a la pieza de papel se debía a una interpretación estratégica propia o inferida de la pregunta (ya que la expresión *con base en una pieza de papel* puede interpretarse como *base geométrica de una caja*). Se aplicó el mismo examen bajo las mismas condiciones (grado escolar, asignatura, tiempo disponible) como preprueba para eliminar la interferencia de la derivada, y *se entregó una pieza de papel de 18 cm por lado* para observar los cambios representacionales y estratégicos que podría introducir la presencia del papel, su manipulación y observación tridimensional. El abordaje estratégico es de corte, lo que indica que no se trata de una *interpretación inferida*, por lo que el *agregar* no es atribuible a la redacción de la pregunta de examen, sino a una *construcción propia*.

La conducción de la clase se realizó en tres ámbitos: (a) el contenido estratégico de profesor y alumnos en las actividades realizadas durante cada etapa de resolución de problemas y ejercicios (preparación, procedimiento y conclusión); (b) formas representacionales generales (concepciones matemáticas) y específicas utilizadas por profesor y alumno, mostradas explícitamente en el discurso y en el trabajo en el pizarrón, trabajo con la calculadora y notas personales de clase, y (c) la estructuración lógica de la discusión y el análisis de los problemas, acompañados de trabajo con ejercicios planteados a los largo de las doce sesiones. Concretamente, la coautora de este trabajo presentó el tema de la derivada con énfasis en el nivel estratégico y representacional, y con base en definiciones, ejercicios y problemas verbales similares al del examen, basado en calculadoras-graficadoras que tenía cada alumno; la profesora tenía la suya conectada a un dispositivo de proyección. En el G2 no se dieron indicaciones particulares al profesor sobre la forma de enseñanza; sólo se le solicitó acceso a su grupo para la aplicación de los exámenes como parte de nuestro estudio; en este grupo el profesor enseñó el tema mediante definiciones y ejercicios tomados del libro, y los estudiantes tenían calculadoras científicas estándar.

A continuación se presenta el proceso interactivo generado durante la sesión en que se trabajaron los puntos (a) y (b) del plan propuesto (Revisión/articulación de conocimiento y Planteamiento de problema) en el G1 (P: Profesora; Al/s: Alumno,a/os,as):[11]

1P, **Als**: (Discusión general: dudas, comentarios y aclaraciones sobre planteamiento, resolución y solución de un problema de área máxima con perímetro fijo presentado en la preprueba).

2P: En seguida plantea el siguiente problema: *¿Qué dimensiones debe tener una pista rectangular de baile para que tenga área máxima si se piensa cercarla con 100 sillas que ocupan 40 centíme-*

[11] En dos sesiones subsecuentes se trabajó en la resolución del problema, cubriendo el ciclo (c) a (d) del plan propuesto.

tros cada una? (Aclara que “cercar la pista” significa colocar las sillas a su alrededor, haciendo contacto lateral una con otra. Acompañó esta aclaración con un dibujo en el pizarrón para ilustrar esa situación).

3Al DT: *Es lo mismo, si se tuviesen 100 sillas y cada una ocupa 40 centímetros, entonces tendríamos que calcular los centímetros en total*.

4Als: (Gestualmente muestran dificultad para comprender por qué se debe hacer esa operación).

5P: (Señala que se puede discutir con base en sillas si se reformula la pregunta en los siguientes términos:) *¿Cuántas de las 100 sillas se deben colocar en cada lado de la pista rectangular para obtener el área máxima?*

6Ala, **Als**: (Casi de inmediato responde:) *25*. (La mayoría asiente gestualmente o comentando).

7P, **Als**: (Solicita que expliquen sus conclusiones. Los estudiantes indican que al dividir 100 sillas entre 4 lados resulta en 25 sillas por lado).

8P, **Als**: (Pregunta si consideran que el problema de pista rectangular y el de área máxima con perímetro fijo se refieren a situaciones similares. Algunos responden afirmativamente).

9P, **Als**: (Comenta que se puede resolver el problema, aunque se trate de centímetros o sillas, a lo que algunos estudiantes asienten. Anuncia que primero lo trabajarán en términos de sillas y después de centímetros. Pregunta nuevamente si ven alguna similitud entre el problema de la pista rectangular con el de área máxima y perímetro fijo. Sólo unos cuantos estudiantes asienten).

10P: (Les recuerda la relación entre la base *b* y la altura *a*, de manera que $a + b = 50$, deducida de $2a + 2b = 100$ según el problema de la pista rectangular. Escribe en el pizarrón una tabla con los datos proporcionados por el alumno DT, los pares 28, 22 y 26, 24, quien comenta que *los obtenemos del resto de 50*. Mientras tanto, dos alumnos que realizaban operaciones en una calculadora avanzada expresan que el valor del área aumenta cada vez más).

11P: *Supongamos que no sabemos que con 25 y 25 se obtiene el área máxima, que nos saltamos ese dato y escribimos 26 y 24. ¿Qué área esperan obtener para ese dato?*

12Als: (Comentan varios resultados posibles, con poco acuerdo entre ellos. Pocos mencionan que se obtendría un área menor).

13P, **Als**: (Pregunta cómo se distribuirían los puntos si se registran los datos de la base en el eje X de un plano cartesiano y los del área en el eje Y, a lo que responden gestualmente que se tendría una forma ascendente. Pocos lo hicieron en forma de parábola y ninguno la mencionó por nombre. Les pide que introduzcan los datos en la calculadora-graficadora para observar la gráfica resultante. El estudiante LN pregunta: *¿Para qué usamos la gráfica?*. A lo que la profesora responde: *Es para ver su distribución o localización en el plano*. Se discute el procedimiento mediante una lluvia de ideas. En conjunto elaboran una lista L_1 con los datos de la base y otra lista L_2 con los de la altura. Algunos alumnos comentan que los puntos están colocados en línea recta. Comenta que la observación es correcta debido a que los datos satisfacen la relación $b = 50 - a$, y les recuerda que dicha relación corresponde a una función lineal cuya gráfica es una recta, un tema discutido en clases anteriores. En conjunto introducen los datos del área en la lista L_3. Obtienen la gráfica que muestra L_1 en el eje X y L_3 en el Y.

Análisis del contenido estratégico y representacional

Se observan los siguientes segmentos estratégico-temáticos en el proceso interactivo descrito:

A. (**1P Als**): Revisión de Conocimiento Previo y Articulación a Conocimiento Nuevo. Se discuten las formas de resolución que sugieren los estudiantes. La profesora ordena la discusión con base en los componentes del problema (variables, datos), permitiendo conjeturas sobre soluciones y procedimientos posibles. Ubica el problema en el terreno de las representaciones Algebraica y Funcional, además de operar con representaciones Conceptual, Medición, Gráfica y Aritmética.

B. (**2P**) a (**7P, Als**): Planteamiento de Problema y Formas Equivalentes. Se ordena la discusión a partir de la equivalencia entre variables y unidades de medición. Los estudiantes asumen que el área máxima buscada es en forma de cuadrado, con base en un razonamiento aritmético que expresa la longitud de los lados como una incógnita, dado el perímetro fijo, en lugar de operar algebraicamente, interpretando dicha longitud como variable junto con el perímetro fijo. Se basan en el resultado del problema de área máxima con perímetro fijo aplicado en el pretest y discutido en el segmento anterior, pero sin considerar dicha condición (perímetro fijo). La profesora utiliza formas representacionales equivalentes para la variables longitud, como Figural y Conceptual. Los estudiantes agregan la representación Aritmética.

C. (**8P, Als**): Comparación de Problemas. Este segmento se origina por la solución propuesta por los estudiantes, compara el problema de la preprueba y el que se está trabajando con el propósito de insistir en sus componentes, como la restricción dada por el perímetro fijo.

D. (**9P, Als**): Transición. De conocimiento previo a conocimiento nuevo, mediante regreso a segmentos B y C para establecer la noción de variable (longitud) con unidades de medición variables (sillas, centímetros) y para discutir los componentes del problema, ya que los estudiantes no ven la similitud entre los problemas planteados, dada por una interpretación de la longitud de los lados como variable y la restricción de perímetro fijo como dato. La profesora opera estratégicamente con componentes del problema, y se lo representa en forma Conceptual.

E. **(10P)** a (**13P Als**): Traducción del Problema. Abordaje estratégico y concreto del problema traduciendo la formulación presentada, básicamente Conceptual y de Medición, a una forma manejable, centrada en representaciones Conceptual, Algebraica y Funcional. Este segmento permitirá continuar con otro que se concentra en el Procedimiento, el cual se realizó en esta sesión y dos subsecuentes (ver nota 11), y así se cumple con los puntos tercero al quinto del plan.

Se puede notar que el segmento A cumple el primer punto del plan propuesto, mientras que los segmentos B y E cumplen el segundo punto de dicho plan. El segmento E se inicia con una variante de la traducción de problemas a formas manejables (segundo punto del plan), y dirige las acciones hacia el procedimiento, período en el cual se hacen los ajusten en las dudas y confusiones expresadas en los segmentos C y D.

Postprueba

Se aplicó el mismo examen del diagnóstico dos semanas después de estudiar la derivada, sin previo aviso y en las mismas condiciones (ver nota 9), cuando los estudiantes ya se encontraban revisando otras reglas de derivación e iniciando métodos de integración.

En esta ocasión hicieron referencia a diez formas representacionales en conjunto: las seis de la preprueba, y cuatro nuevas que surgieron durante el trabajo en clase: Algebraica, Funcional, Gráfica y Tabular (ver Anexo 1). Medición pasó a primer término en el G1, y Simbólica en el G2. Si en la preprueba la mayoría trabajó aritméticamente y con un solo caso, en la postprueba cambió a una aproximación algebraica y manejo de variables; más de la mitad de los estudiantes del G2 también lo hizo. En el Anexo 2 se encuentra un análisis detallado del examen resuelto por el estudiante LN, del G1, en donde se observa que utilizó ocho formas representacionales específicas en total: Figural, Medición, Simbólica, Conceptual, Algebraica, Funcional, Gráfica y Aritmética. Con ello, LN aborda el problema con un enfoque representacional general que interpreta variables en la formulación del problema y lo ataca con un procedimiento Algebraico-Funcional.

Analizando las formas representacionales por etapa de resolución, la más frecuente en ambos grupos fue Figural en la *preparación*, Simbólica en el *procedimiento* y Conceptual en la *conclusión*. El estudiante LN prepara la resolución mediante las siguientes formas representaciales: Figural, Medición, Simbólica, Conceptual, Algebraica y Funcional, apoyado en una estrategia de corte; en el *procedimiento* opera con representaciones abstractas: Conceptual, Algebraica, Funcional y Simbólica, además de la Gráfica; y en la *conclusión* se concentra en Conceptual, Aritmética y Medición. Se observa que su estrategia de preparación consiste en dibujar y asignar un símbolo a una variable (longitud), con lo que intercambia y transita entre tres representaciones (Figural, Medición y Simbólica). Opera de manera similar en las etapas siguientes de resolución. Debido a que las referencias representacionales más frecuentes en cada grupo son más diversas en general y por etapa que en la preprueba, se puede decir que hubo avances sustanciales en el manejo representacional a nivel específico (más formas). Además, como se dieron diferencias en la frecuencia de las representaciones utilizadas entre grupos, se puede decir que éstos se diferenciaron entre sí a lo largo del trabajo en la asignatura.

Como en el caso de LN, la mayoría en el G1 decidió seguir la estrategia del corte, excepto dos estudiantes, uno que siguió el agregar y otro el dividir, mientras que uno en el G2 siguió el agregar. La estrategia de corte se basa en la interpretación de variables (longitud), en una aproximación algebraico-funcional: interpretar el área como función del corte. Sin embargo, la mayoría en ambos grupos se limitó a trabajar en forma algebraica y algunos de ellos obtuvieron estimaciones razonables como solución. Sólo el estudiante LN en G1 y tres del G2 usaron la derivada (sólo uno de estos obtuvo una respuesta correcta).

En resumen, el G1 cambió de un enfoque representacional general que toma el problema como ejercicio, esperando encontrar todos los datos, a uno que lo explica como problema matemático, interpretando variables en su formulación. También cambió de un enfoque representacional particular en el procedimiento de Medición-Aritmética a uno Algebraico-Funcional, y de estrategias ineficientes a una de corte. Además, lograron aumentar su bagaje representacional en relación con problemas que requieren el uso de la derivada. Estos resultados muestran que realmente se opera con varias representaciones a la vez, algunas de ellas intercambiables, lo cual es muy importante en las diversas etapas de resolución de problemas, especialmente al inicio. En este sentido, se puede decir que se logró el objetivo planteado para el G1 relativo al cambio paradigmático (nivel general) y al fortalecimiento del espectro representacional (nivel particular), con intercambio de formas equivalentes y el tránsito entre ellas. En el G2 no se trabajó ni logró el cambio paradigmático, aunque sí se incoporó una mayor variedad de formas representacionales en el trabajo de los estudiantes, y se logró abordar el problema con una estrategia de corte. A estos avances hay que agregar un trabajo más intenso para superar las dificultades de procedimiento en el uso de la derivada.

Aproximación didáctica: una propuesta

De acuerdo con los elementos teóricos, la experiencia didáctica y los resultados de investigación presentados, se observa que un tratamiento adecuado del contenido estratégico y representacional (general y específico) de las matemáticas tiene efectos positivos a ese respecto en el aprendizaje de los estudiantes. Es un nivel de trabajo docente que generalmente no se aborda y se considera demasiado abstracto para tratarse en clase. En ocasiones se trabaja como un tema más, separado de los temas regulares de los programas escolares, e incluso se considera que su aparente carácter filosófico debe tratarse en otras asignaturas. Sin embargo, los resultados obtenidos muestran que un tratamiento adecuado es perfectamente factible, como parte de la discusión integrada y cotidiana en clase. Es decir, el contenido representacional es un importante recurso en el aprendizaje de conceptos y el desarrollo de estrategias para resolver problemas. Por ello, consideramos relevante el esquema didáctico propuesto:

- Revisión de conocimiento previo y articulación a conocimiento nuevo.
- Planteamiento de problema: traducción a una forma representacional manejable, análisis de componentes con énfasis en el concepto de variable, y manejo estratégico-representacional.
- Generalización de operación estratégica: planteamiento, variables, conjeturas y manejo representacional.
- Abordaje estratégico del problema y desarrollo de procedimiento de resolución, con manejo representacional.
- Monitoreo o evaluación continua de procedimiento y solución.

Los resultados anteriores sugieren que, con base en este tratamiento estratégico-representacional, debe darse mayor tiempo y atención al desarrollo de habilidades algorítmicas, ya que ni en el G1 ni en el G2 se logró el propósito de aprendizaje respectivo (a pesar de que el G2 se dedicó exclusivamente al desarrollo de dichas habilidades). Tanto el ámbito estratégico-representacional como el algorítmico deben trabajarse en un ambiente didáctico que combine exposición, trabajo en grupo y por equipos, de manera que sea posible la discusión de conjeturas y otras actividades relevantes en clase y fuera de ella (tarea). De esta manera, se pueden lograr los objetivos planteados anteriormente no sólo en el ámbito estratégicorrepresentacional como se muestra en este trabajo, sino en el algorítmico también.

Consideraciones finales

La representación es fundamental en la experiencia de aprendizaje de las matemáticas, dadas sus implicaciones cognitivas y epistemológicas, en el marco de una teoría de la interacción social: en el plano cognitivo, se requiere abordar los problemas con base en un instrumental conceptual y metodológico que permita trabajar con formas matemáticas equivalentes para una misma idea (Janvier, 1987; Eisenberg y Dreyfus, 1992). En el plano epistemológico se requiere abordar dichos problemas desde una visión paradigmática que los vea no como un procedimiento rutinario, sino como un reto en el proceso de construcción de conocimiento y de producción de sentido (Schoenfeld, 1992; Hiebert *et al*., 1996).

A pesar de que es sabido que el aprendizaje pleno de conocimiento complejo no sucede en el momento esperado (*v.g*. Balderas, 1998), es necesario considerar que el proceso de su construcción sólo es posible si existen condiciones adecuadas. El trabajo didáctico centrado en el contenido representacional de las matemáticas (formas de abordar los problemas, utilización de representaciones equivalentes y tránsito entre ellas), y el diseño de estrategias de solución (discusión de conjeturas) favorecen ese proceso. Esta aproximación demanda del profesor el manejo paradigmático mencionado, más cercano a las estructuras lógico-categoriales de las matemáticas, sólidos conocimientos, posesión de formas representacionales equivalentes para un concepto y procedimiento dados, flexibilidad para transitar entre ellas y flexibilidad para generar discusión en clase, superando la tan criticada pero desafortunada y ampliamente practicada forma de trabajo centrado en exposición, pizarrón y ejercicios rutinarios tomados de algún libro de texto. Esto último implica conducir la clase con base en diversas formas de trabajo grupal, combinándolas con exposición y asesoría, aprovechar los recursos tecnológicos como las calculadoras graficadoras utilizadas en el G1, y presentar cada concepto matemático en varios sistemas representacionales y transitar entre ellos. En este contexto interactivo (Vygotsky, 1934; Bloome, 1992) en el que claramente aparecen los planos semiótico (Frid, 1992; Presmeg, 1998) y lingüístico (Campos y Estrada, 1999), es necesario asegurarse que los estudiantes, conforme avanzan en la resolución de un problema, articulan conocimiento previo con conocimiento nuevo, trabajan con formas representacionales intercambiables, abordan los problemas de una manera más flexible y hacen las modificaciones conceptuales, lógicas y de procedimiento pertinentes.

Referencias

Ausubel, D. (1973). Aspectos psicológicos de la estructura del conocimiento, en S. Elam, *Educación y estructura del conocimiento*, Buenos Aires, Ateneo, 211-238.

Balderas, P. (1998). La representación y el razonamiento visual en la enseñanza de la matemática, Tesis doctoral, Facultad de Filosofía y Letras, UNAM.

Bloome, D. (1992). Interacción e intertextualidad en el estudio de la lectoescritura en las aulas: el microanálisis como una tarea teórica, en M. Rueda y M. A. Campos, *Investigación etnográfica en educación*, México, UNAM, 123-180.

Blumer, H. (1982). *El interaccionismo simbólico. Perspectiva y método*, Barcelona, Hora.

Brown, S. y Walter, M. (1990). The art of problem posing, Lawrence Erlbaum, Hillsdale.

Burkitt, I. (1991). *Social selves: theories of social formation of personality*, Brighton, ISA/Sage.

Campos, M. A. y Estrada, J. (1999). Representaciones matemáticas de estudiantes preuniversitarios en la resolución de un problema de optimización, *Educación Matemática*, Vol. 11, Nº 2, 32-50.

Campos, M. A. y Gaspar, S. (2000, en prensa). La representación y la construcción de conocimiento, *Perfiles Educativos*, Vol. 4, Nos. 85-86.

Culioli, A. (1994). Representaciones, procesos referenciales y regulación. La actividad lingüística como producción y reconocimiento de forma, en J. Montangero y A.Tryphon, *Lenguaje y cognición*, Universidad de Guadalajara/Gamma Editorial, Guadalajara, 178-227.

Davis, R.; Shrobe, H. y Szolovitz, P. (1993). Representation and knowledge structure, *AI Magazine*, (14), 1, 17-33.

Dreyfus, T. (1991). Advanced mathematical thinking processes, en D. Tall, *Advanced mathematical thinking*, Dordrecht, Kluwer, 25-41.

Eisenberg, T. y Dreyfus, T. (1991). On understanding how students learn to visualize functions transformations, en: E. Dubinsky *et al.*, *Research in collegiate mathematics education*, I. Providence, AMS-MAA, 45-68.

Ernest, P. (1997). *Social constructivism as a philosophy of mathematics*, New York, SUNY Press.

Frid, S. (1992). Three approaches to undergraduate calculus instruction: their nature and potential impact on students' language use and source of conviction, en E. Dubinsky *et al.*, *Research in Collegiate Mathematics Education*, Vol. I, pp. 69-100.

Garton, A. (1994). *Interacción social, cognición y lenguaje*, Barcelona, Paidós.

Harel, G. y Kaput, J. (1991). The role of conceptual entities and their symbols in building advanced mathematical concepts, en D. Tall, A*dvanced mathematical thinking*, Dordrecht, Kluwer, 82-94.

Herzlich, C. (1975). La representación social, en S. Moscovici*, Introducción a la psicología social*, Barcelona, Planeta, 389-418.

Hiebert, J. y Carperter, T. (1992). Learning and teaching with understanding, en: D. A. Grouws, *Handbook of research in mathematics thinking and learning*, NCTM, New York, 65-97.

Hiebert, J.; Carpenter, T.; Fennema, E.; Fuson, K.; Human, P.; Murray, H.; Olivier, A. y Wearne, D. (1996). Problem solving as a basis for reform in curriculum and instruction: the case of mathematics, *Educational Researcher*, Vol. 25, Nº 4, 12-21.

Janvier, C. (1978). The interpretation of complex cartesian graphs, Tesis doctoral, Whetherby, University of Nottingham.

Janvier, C. (1987). Translation processes in mathematics education, en C. Janvier, *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics*, Hillsdale, LEA, 27-32.

Kuhn, T. (1972). *La estructura de las revoluciones científicas*, México, FCE.

Lakatos, I. (1978). *La metodología de los programas de investigación*, Madrid, Alianza Editorial.

Medin y Wattenmaker (1989). Category cohesiveness, theories and cognitive theories, en U. Neisser, Concepts and conceptual development, Cambridge, Cambridge University Press, 25-62.

Neisser, U. (1989). From direct perception to conceptual structure, en U. Neisser, *op. cit.,* 11-23.

Popper, K. (1985). *La lógica de la investigación científica*, Madrid, Tecnos.

Presmeg, N. (1998). On visualization and generalization in mathematics, *Proceedings of the XX Annual Meeting, International Group for the Psychology of Mathematics Education (North American Chapter), I,* ERIC, Columbus.

Pressini, D. y Knuth, E. (1998). The dualistic nature of school mathematics discourse, *Proceedings of the XX Annual Meeting, International Group for the Psychology of Mathematics Education (North American Chapter),* Vol. I, ERIC, Columbus, 227-233.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: problem solving, metacognition and sense in mathematics, en: D. A. Grouws (ed.), *op. cit.*, pp. 334-370.

Sternberg, R. (1987). The psychology of verbal comprehension, en R. Glaser, Advances in Instructional Psychology, III, Hillsdale, LEA, 97-150.

Strauss, A. y Corbin, R. (1994). *Grounded theory: procedure and techniques*, Los Angeles, SAGE.

Vygotsky, L. (1973/1934). Aprendizaje y desarrollo intelectual en la edad escolar, en *Psicología y Pedagogía*, Madrid, Akal, 23-39.

Anexo 1

GLOBAL DE REPRESENTACIONES
(ambos grupos, ambos exámenes)

Representación	Descripción
En pre y post test:	
Aritmética	Se realizan, indican o implican operaciones aritméticas.
Conceptual	Referencia a conceptos matemáticos.
Figural	Se realizan dibujos o figuras.
Medición	Se expresan dimensiones en forma numérica o simbólica.
Numérica	Se utilizan números que no representan medidas o que resulten de operaciones.
Simbólica	Se usan símbolos aparte de operaciones.
Sólo en el post test:	
Algebraica	Expresiones y operaciones algebraicas que incluyen variables e incógnitas.
Tabular	Ordenación numérica por pares (tríadas...) en formato de dos (o más) columnas.
Funcional	Relaciones funcionales entre variables.
Gráfica	Uso de coordenadas cartesianas.

Anexo 2

RESOLUCION DE LA POSTPRUEBA POR EL ESTUDIANTE LN (texto nuestro en paréntesis)

Acciones	Representaciones
(En la parte superior izquierda hace un dibujo de la hoja de metal, a la que llama base, marca las dimensiones de sus lados con 18 cm = a, marca cuadrados en las esquinas y su longitud con el símbolo x, y dibuja cuatro líneas punteadas indicando doblez y formar una caja).	Figural (dibujo de la hoja de metal sheet como se indica) Medición (longitud del lado de la hoja de metal, y dimensiones de la caja planeada) Simbólica (asignación del símbolo x a la longitud del lado del cuadrado marcado en las esquinas)
(En la parte superior derecha hace un dibujo al que denomina proyección isométrica, con marcas de dimensiones y el ángulo de la proyección en el horizonte igual a 30°).	Figural (dibujo de una caja) Medición (tres dimensiones de la caja) Simbólica (asignación del símbolo x a la longitud del cada lado de la caja) Conceptual (denominación del volumen)
(Expresa dos relaciones algebraicas, enuncia que sustituye (1) in (2), aunque en realidad sustituye (2) en (1), resuelve b, y enuncia el resultado del procedimiento) – (1) $a = b + 2x$ – (2) $a = 18$ – – $18 = b + 2x$ – $18 - 2x = b$ – Tengo el lado b como una función del corte.	Algebraica (relaciones y procedimiento de sustitución) Funcional (longitud de la base de la caja como función del corte, restado del lado de la hoja original)
(Continúa con una secuencia de operaciones y enuncia que obtiene el área de la base de la caja como función del corte).	Conceptual (referencia a volumen y área)

Acciones	Representaciones
– El volumen de la caja es: – $V = A \cdot h$ en donde V = volumen de la caja, A = área de la base y h = altura de la caja – $A = b^2$. El área es igual al lado multiplicado por lado, es decir, $b \cdot b$ – $A = (18 - 2x)^2$ – $A = 324 - 72x + 4x^2$ – Tengo el área como función del corte – $h = x$	Algebraica Funcional (área como función del corte) Simbólica (modificación del símbolo de la altura, de x a h).
(Continúa con una secuencia de operaciones y enuncia que obtiene el volumen de la caja como función del corte) – $V = \left(324 - 72x - 4x^2\right)x = 4x^3 - 72x^2 + 324x =$ $4\left(x^3 - 18x^2 + 81x\right)$, – Tengo el volumen como función del corte – $y = 4\left(x^3 - 18x^2 + 81x\right)$	Algebraica Funcional Conceptual (referencia a volumen)
(Trabaja con la calculadora para obtener la gráfica correspondiente) – Graficando V(x)	Gráfica Conceptual: derivada, máximo y mínimo relativos, tangente, pendiente.
(Continúa con la obtención de valores mínimo y máximo, explicando su procedimiento) – Tengo que diferenciar para encontrar un máximo y un mínimo, y luego tener la pendiente de cada tangente a la curva en ambos puntos igual a 0. – $V(x) = 4x^3 - 72x^2 + 324x$ – $V'(x) = g'(x) - r'(x) + z'(x)$ – $g(x) = 4x^3$; $g'(x) = 12x^2$ – $r(x) = 72x^2$; $r'(x) = 144x$ – $z(x) = 324x$; $z'(x) = 324$ – $V'(x) = 0$	Funcional Conceptual (referencia a reglas de diferenciación, pendiente) Algebraica

Acciones	Representaciones
– Tenemos la pendiente igual a cero – $12x^2 - 144x + 324 = 0$ – $a = 12 \quad b = -144 \quad c = 324$ – $x_1 = 9$ – $x_2 = 3$, que es el corte mínimo – Tengo el valor máximo	
(En seguida realiza una verificación y enuncia su solución) – $18 - 2(3) = b$ – $12 = b$ – Las dimensiones de la caja deben ser: largo 12 cm, ancho 12 cm y altura 3 cm. – El volumen máximo es igual a $432cm^3$	Aritmética Conceptual (referencia al volumen mediante las dimensiones de la caja)